DOI:10.13471/j.cnki.acta.snus.2020.07.31.2020A038

基于经验分布下GARCH模型对VaR的金融测度*

李翠霞[1]，陈媛媛[2]

1. 徐州工程学院数学与统计学院，江苏 徐州 221111
2. 兰州大学数学与统计学院，甘肃 兰州 730000

摘　要： VaR（Value at Risk）在风险管理领域一直深受银行业和金融机构的重视，GARCH模型对VaR的测量是一个重要研究领域。然而在实际应用中，利用传统参数GARCH模型建模时需要指定条件分布形式，一旦分布指定错误将会导致模型失效。因此，我们在标准的GARCH(1,1)模型下，结合累积经验分布函数对残差进行修正，避免了传统参数分布由于事先指定错误带来的模型风险。经过实证研究发现，我们采用的方法比指定参数分布下的标准GARCH(1,1)模型在测量VaR方面有了很大改进，其失败频率和相对误差都显著降低。因此，文中采用这种创新的尾部分布形式在估计VaR值方面具有一定的实际应用价值。

关键词： VaR；标准GARCH(1,1)模型；累积经验分布函数；尾部分布

中图分类号： O212　　**文献标志码：** A　　**文章编号：** 0529-6579（2021）04-0177-06

The financial measurement of VaR under the GARCH model based on empirical distribution

LI Cuixia[1], *CHEN Yuanyuan*[2]

1. *School of Mathematics and Statistics, Xuzhou University of Technology, Xuzhou 221111, China*
2. *School of Mathematics and Statistics, Lanzhou University, Lanzhou 730000, China*

Abstract: In the field of risk management, VaR has been highly valued and the measurement of VaR by GARCH model is an important research. In practical application, it is necessary to specify the conditional distribution form when using traditional parameter GARCH model for modeling. However, the model will become invalid if the distribution is specified incorrectly. Therefore, under the standard GARCH(1, 1) model, the residual error is corrected in combination with the cumulative empirical distribution function, so as to avoid the model risk caused by the pre-specified error of the traditional parameter distribution. In the empirical research, it is found that the proposed method is greatly improved compared with the standard GARCH(1,1) model based on specified parameter distribution in the measurement of VaR, and its failure frequency and relative error are significantly reduced.

Key words: VaR; standard GARCH model; the cumulative empirical distribution function; the tail distribution

随着金融体系的不断完善，全球金融市场进入了高速发展的阶段，随之而来的金融风险也受到了人们的广泛关注。众所周知，金融风险不仅严重影响企业的生存与发展，同样对金融机构及整个国家的经济运行都会产生巨大的冲击。20世纪90年代以来一些大的金融机构所经历的金融危机，大多是不能有效

* 收稿日期：2020-07-31　　录用日期：2020-12-23　　网络首发日期：2021-03-19
基金项目：国家自然科学基金（11301236）
作者简介：李翠霞（1981年生），女；研究方向：金融统计；E-mail：licuixia2002@163.com
通信作者：陈媛媛（1995年生），女；研究方向：金融时间序列分析；E-mail：yy18290671518@163.com

地管理其面临的市场风险，如巴林银行、德国金属期货公司、日本大和银行等都在金融市场上遭受了几十亿美元的损失。在这一连串举世瞩目的衍生品灾难发生以后，人们呼吁重新评估整个风险管理体系，包括用于衡量风险的工具，在这一前提下，1994年摩根大通[1]提出的VaR（Value at Risk，在险价值）方法在这个时代背景下成为一种强有力的风险管理方法，同年10月，他将建立的RiskMetrics模型的资料和相关方法论公诸于世，市场上所有参与者都可以通过网络得到相关资料。至此，在金融风险管理领域，世界上一些主要的银行和金融机构越来越重视对VaR的使用，这是一种容易理解和掌握的计算和控制市场风险的方法。VaR最重要的特征还在于它的透明性，仅仅一个数值就可使任何人都清楚风险多大。Artzner等[2]证明VaR在理论上不满足次可加性，但它在风险度量领域所起到的重要性是不可忽视的。尽管存在这一缺陷，但行业和银行部门的监管机构都更喜欢使用VaR，而不是满足次可加性的风险度量指标——预期缺口（Expect Shortfall，简称ES）。主要是因为VaR具有很多实际优势，比如较小的数据需求，易于回溯测试，在某些情况下易于计算等。

1 模型设定

金融收益率序列有两个非常重要的特征：异方差性和重尾现象。为了描述金融数据的这种特征，Engle[3]提出了ARCH模型，在此基础上，Bollerslev[4]建立了GARCH（广义ARCH）模型。随后，Bollerslev等[5]、Taylor[6]将这些模型应用于风险（股票价格、金融指数、外汇汇率等）计量中存在的长期依赖问题。Chang等[7]在前人的研究基础上，提出分别使用GARCH、EGARCH、GJRGARCH等波动率模型对VaR进行建模，并将条件分布分别设为高斯分布和t分布。Francq[8]在标准GARCH对VaR建模的过程中，将条件波动模型的参数形式设为$\varepsilon_t = \sigma_t\left(\theta_0\right)\eta_t$，认为VaR的计算结果取决于$\eta_t$创新分布的过程，而不取决于波动率参数$\theta_0$。因此本文在Francq[8]的理论基础下，利用标准GARCH(1,1)模型拟合波动率，同时结合残差经验分布函数这种分布形式对VaR进行建模分析。

标准的GARCH(1,1)模型为

$$r_t = u_t + \varepsilon_t,\quad \varepsilon_t = \sigma_t z_t,\quad \sigma_t^2 = \omega + \alpha\varepsilon_{t-1}^2 + \beta\sigma_{t-1}^2,$$

其中u_t为收益率序列t时刻的均值，ε_t是收益率序列t时刻的残差，z_t是均值为0，方差为1的独立同分布（iid，independently identically distribution）的随机变量序列（即z_t~iid(0,1)）。在这里，我们不指定z_t的具体分布，因此形成了更加有利的半参数模型。因事先未指定z_t的具体分布，因此避免了由于模型与实际情况不符造成的失效。同时，我们的模型因为在参数模型的框架下，因而又避免了非参数模型面临的维数灾难等问题。

1.1 VaR的概念

VaR指在给定的概率水平下，金融产品在某一特定时间段内的最大可能损失。即

$$P\left(\triangle P > \mathrm{VaR}\right) = 1 - \tau,$$

其中$\triangle P$为金融产品在持有期$\triangle t$内的损失，VaR是在置信水平τ下可能产生的最大损失值。例如：在90%的置信水平下，某公司一天的VaR值为500万美元，指该公司以90%的把握保证，在一天内由于市场价格变动所带来的损失不会超过500万美元。

在本文中用$Q(\tau) = \mathrm{VaR}_{1-\tau}$表示在置信水平$\tau$下的VaR值（最大损失）。

1.2 模型设定

假设$\mathrm{VaR} = G\left(\Theta,\ z_i\right)$，$G(\cdot)$的形式通常有GARCH、EGARCH、GJRGARCH等设定形式。这里主要讨论尾部分布形式，为了尽可能减少参数估计量，我们使用标准GARCH(1,1)模型为基础建立模型，即

$$\mathrm{VaR}_{1-\tau} = \mu + \sigma_t(z_t)_\tau,\qquad \sigma_t^2 = \omega + \alpha\varepsilon_{t-1}^2 + \beta\sigma_{t-1}^2,$$

这里用$Q(\tau) = \mathrm{VaR}_{1-\tau} = G\left(\Theta,\ Q_z(\tau)\right)$表示，其中$\Theta = \left(\mu,\ \omega,\ \alpha,\ \beta\right)$为标准GARCH(1,1)模型中的参数，$Q_z(\tau)$为$z_i$的$\tau$阶分位数。以下分3个步骤来进行计算。

(i) $\hat{\Theta}$为Θ的极大似然估计量，即$\hat{\Theta} = (\hat{\mu},\ \hat{\omega},\ \hat{\alpha},\ \hat{\beta})$，可以估计$\hat{z}_i = \dfrac{r_i - \hat{\mu}}{\hat{\sigma}_i}$；

（ii）利用$\{\hat{z}_i\}$的τ阶样本分位数$\hat{Q}_z(\tau)$估计$Q_z(\tau)$，$\hat{Q}_z(\tau)=\inf\{t：\hat{F}_z(t)\geqslant\tau\}$，其中$\hat{F}_z(t)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}1_{\hat{z}_i\leqslant t}$（$\hat{F}_z(t)$为$\hat{z}_i$的累积经验分布函数[9]）；

（iii）将$\hat{\Theta}$和$\hat{Q}_z(\tau)$代入$Q(\tau)=G(\Theta，Q_z(\tau))$中，得到$\hat{Q}(\tau)=G(\hat{\Theta}，\hat{Q}_z(\tau))$，进而也就得到了$\mathrm{VaR}_{1-\tau}$。

1.3　模型评价方法

1.3.1　失败频率检验　对度量VaR的模型准确性检验指的是模型的度量结果对实际损失的覆盖程度。例如：给定99%置信水平下的VaR值，若实际损失超过预期VaR值的概率大于1%，说明模型预测失效。本文采用Kupiec[10]提出的失败频率检验法。其基本思想是观察实际损益超过VaR值的概率。把实际损益超过VaR值记为预测失败。假定VaR的置信水平为τ，实际观测天数为T，预测失败天数为N，则失败频率为$p=N/T$，失败的期望概率为$p^*=1-\tau$。此时，对模型准确性的检验等同于检验失败概率p是否等于给定概率p^*，即检验的零假设是H_0: $p=p^*$。

Kupiec提出了对H_0最合适的检验是似然比率检验

$$\mathrm{LR}=-2\ln\left[\left(1-p^*\right)^{T-N}p^{*N}\right]+2\ln\left[\left(1-\frac{N}{T}\right)^{T-N}\left(\frac{N}{T}\right)^{N}\right].$$

在假设H_0下，统计量LR服从自由度为1的χ^2分布。失败频率检验法应用广泛，但是当基于每日回报的基础之上，数据量较少时很难评价模型低估潜在损失的情况。因此，这种模型评价方法通常基于长期数据观测的前提下。

1.3.2　相对误差　为了体现模型的准确性，本文在失败频率这个指标基础上增加了一个新的评价指标——相对误差（Relative Error，RE），可以写为

$$\mathrm{RE}=\left|\frac{N/T-\tau}{\tau}\right|.$$

相对误差越小，说明对VaR的预测效果越准确。

2　基本数据分析

选取的数据是道琼斯指数（DJIA）2009年1月2日至2019年12月31日的数据（见图1），样本量为2 768个数据，我们将前2 476个数据作为训练集，用于模型的建立，后292个数据作为测试集，用来观察模型的预测准确程度。本文采用对数收益率，即$r_t=\ln p_t-\ln p_{t-1}$，p_t为第t日收盘价。相对于一般收益率，采用对数收益率主要有以下几点原因：① 对数函数使得收益率的取值扩展到整个实数域范围，对于

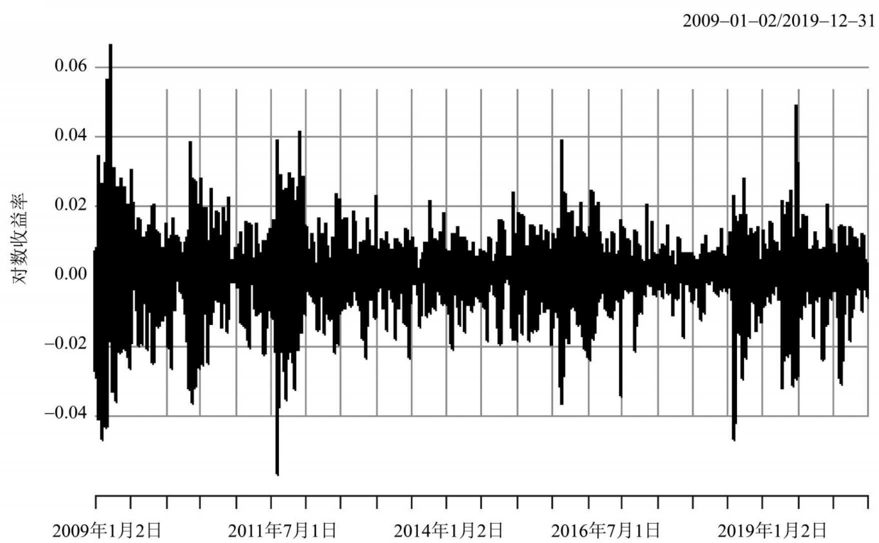

图1　道琼斯指数日收益率

Fig. 1　DJIA index daily return

金融产品的建模更为合适。② 通过对收益率取对数，将原本计算中的乘法运算变为加法运算，简化了计算过程。③ 对时间序列的数据进行建模时，推导时间序列之和的计算更加方便，使得模型建立更简单。

2.1 数据基本特征

从图1可以看出我们研究的数据是比较平稳的，并且也能够看出金融时间序列存在的波动丛集性特征（大的波动后面常伴随大的波动，小波动的后面跟随小的波动）。从数据的基本特征来（见表1）看，道琼斯指数（DJIA）的偏度分别为−0.315 80(<0)，峰度分别为4.643 77(>3)，同时其JB统计量为2 254.568，并结合QQ图（见图2）可以看出，研究数据不服从正态分布，并具有尖峰厚尾的特征。

表1 数据基本特征统计

Table 1 Data basic characteristics statistics

项目	样本量	均值	标准差	偏度	峰度	JB统计量（p值）
DJIA	2 476	0.000 41	0.00 963	−0.315 80	4.64 377	2 254.568 （0.00）

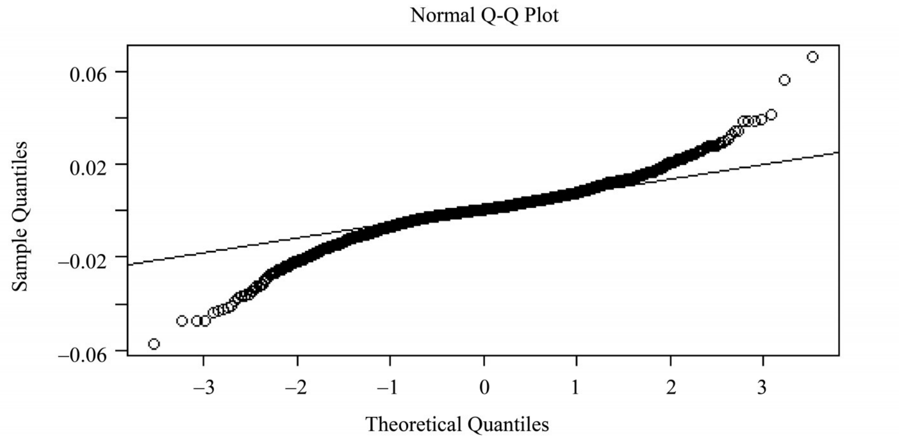

图2 道琼斯指数QQ图

Fig.2 DJIA QQ plot

2.2 平稳性检验

对时间序列数据进行分析建模前，首先需要对序列是否平稳进行检验。在此，我们采取了ADF（Augmented Dickey-Fuller test）[11]检验和PP（Phillips-Perron Unit Root Test）[12]单位根检验。

2.2.1 ADF检验

ADF检验通过在回归方程右边加入因变量y_t的滞后差分来控制高阶序列相关。

（I）无常数项、无趋势项的p阶自回归过程：$y_t = \gamma_1 y_{t-1} + \cdots + \gamma_p y_{t-p} + \xi_t$.

（II）有常数项、无趋势项的p阶自回归过程：$y_t = \rho + \gamma_1 y_{t-1} + \cdots + \gamma_p y_{t-p} + \xi_t$.

（III）有常数项、有趋势项的p阶自回归过程：$y_t = \rho + \delta t + \gamma_1 y_{t-1} + \cdots + \gamma_p y_{t-p} + \xi_t$.

模型（III）中的t是时间变量，代表序列随时间变化的某种趋势。虚拟假设均为$H_0: \gamma = 0$，即存在单位根，该序列不平稳。模型（III）与模型（I）、（II）的差别为是否含有常数项和趋势项，检验顺序为（III）→（II）→（I），何时拒绝零假设，何时停止检验，即该序列为平稳序列。经检验发现，在第一次检验（III）时即拒绝原假设，说明我们研究的序列是平稳的。

2.2.2 PP检验

PP检验优化的是DF统计量，通过非参数方法来修正DF统计量，使其具有滞后期估计功能。

道琼斯指数经过ADF和PP单位根检验结果分别为−13.943和−53.086，它们的p值都远远小于0.01，在99%的显著性水平下拒绝了原假设，说明我们研究的收益率序列是平稳的。

2.3 异方差检验

Engle在1982年提出检验残差序列中是否存在ARCH效应的拉格朗日乘数检验（Lagrange multiplier test），即ARCH-LM检验。其零假设是序列不存在ARCH效应，此时检验统计量渐近服从χ^2分布。检验

结果如表2所示。

表2　ARCH-LM检验

Table 2　ARCH-LM test

滞后阶数	Lag=5（p值）	Lag=10（p值）	Lag=15（p值）
ARCH-LM	346.79（0.00）	407.05（0.00）	443.03（0.00）

检验结果p值可以看出，我们在滞后阶数为5阶、10阶、15阶均拒绝了原假设，即原序列存在显著的ARCH效应。从以上的数据分析可以看出：收益率序列是平稳的，不服从正态分布且具有尖峰厚尾的特征，其次数据存在显著的ARCH效应，因此在这里使用GARCH模型是合适的。

3　模型预测与结果分析

GARCH(1,1)模型选取以下参数值：$\mu = 7.45\times10^{-4}$，$\omega = 2.67\times10^{-6}$，$\alpha = 0.149$，$\beta = 0.824$，对数似然值为8 410.83。

3.1　模型预测

以下是我们分别使用指定条件分布为正态分布的GARCH(1,1)模型，以及经过我们提出的新方法修正后在样本外的测试结果（见表3）。

表3　道琼斯指数(DJIA)预测结果[1)]

Table 3　Predicted results of DJIA

模型形式	置信度/%	预期失败天数	实际失败天数	失败率/%	p值	是否接受H_0	RE
标准GARCH(1,1)	99	2	7	2.40	0.04	N	1.40
	97.5	7	9	3.08	0.54	Y	0.23
	95	14	17	5.82	0.53	Y	0.16
残差经验分布下的GARCH(1,1)	99	2	2	0.68	0.57	Y	0.32
	97.5	7	7	2.40	0.91	Y	0.04
	95	14	16	5.48	0.71	Y	0.10

1）p值为0.05显著性水平下的检验p值，N代表拒绝原假设H_0，Y代表接受原假设H_0。

3.2　结果分析

通过Kupiec失败频率检验结果看到，使用标准GARCH(1,1)建立模型，其预测效果表现不佳，尤其是在99%的置信水平下，利用标准的GARCH(1,1)模型预测结果，其实际失败天数是预期失败天数的数倍。可以看到传统的参数模型一旦指定条件分布是错误的，模型的表现效果就会很差。在我们利用新方法对残差进行修正后，实际失败率得到了很大的改善，不仅在各置信水平下通过了Kupiec失败频率检验，而且与预期失败天数十分接近。其次，我们采用的方法得到的相对误差也小于标准GARCH(1,1)模型下的误差，因此，我们的模型不仅修正了标准的GARCH(1,1)模型，并且在较高置信水平下对VaR的度量更为准确。

参考文献：

[1]　JORION P. Value at risk: a new benchmark for measuring derivatives risk [M]. Chicago: Irwin Professional Publishers, 1996.

[2]　ARTZNER P, DELBAEN F, EBER J M, et al. Coherent measures of risk [J]. Mathematical Finance, 1999, 9(3): 203-228.

[3]　ENGLE R F. Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of united kingdom inflation [J].

Econometrica: Journal of the Econometric Society, 1982, 50(4): 987-1007.

[4] BOLLERSLEV T. Generalized autoregressive conditional heteroscedasticity [J]. Journal of Econometrics, 1986, 31(3): 307-327.

[5] BOLLERSLEV T, CHOU R, KEONER K, et al. ARCH modeling in finance: a review of the theory and empirical evidence [J]. Journal of Econometrics, 1992,52: 5-59.

[6] TAYLOR S J. Modelling financial time series [M]. Singapore: World Scientific, 2008.

[7] CHANG C L, JIMÉNEZ-MARTÍN J Á, MAASOUMI E, et al. A stochastic dominance approach to financial risk management strategies [J]. Journal of Econometrics, 2015, 187(2): 472-485.

[8] FRANCQ C, ZAKOÏAN J M. Risk-parameter estimation in volatility models [J]. Journal of Econometrics, 2015, 184(1): 158-173.

[9] WANG C S, ZHAO Z. Conditional value-at-risk: semiparametric estimation and inference [J]. Journal of Econometrics, 2016, 195(1): 86-103.

[10] KUPIEC P. Techniques for verifying the accuracy of risk measurement models [J]. The Journal of Derivatives, 1995, 3(2): 73-84.

[11] DICKEY D A, FULLER W A. Distribution of the estimators for autoregressive time series with a unit root [J]. Journal of the American Statistical Association, 1979, 74(366a): 427-431.

[12] PHILLIPS P C, PERRON P. Testing for a unit root in time series regression [J]. Biometrika, 1988, 75(2): 335-346.

（责任编辑　冯兆永）